

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

MODELOVÁNÍ KMITÁNÍ DYNAMICKÉ SOUSTAVY S N-STUPNI VOLNOSTI

MODELLING OF VIBRATION OF DYNAMIC SYSTEMS WITH N-DEGREES OF FREEDOM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

ROBIN LUKY

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. DANIEL DUŠEK, Ph.D.

BRNO 2010

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zabývá kmitáním soustav se soustředěnými parametry s n -stupni volnosti. Uvádí postupy řešení volně kmitající netlumené soustavy, buzené netlumené soustavy, buzené tlumené soustavy a jim náležící vlastní tvary, vlastní frekvence a amplitudofrekvenční charakteristiky. V práci je na závěr uvedeno řešení příkladu dynamického tlumiče podle teoretického postupu uvedeného v této práci.

KLÍČOVÁ SLOVA

Vlastní frekvence, kmitání soustav, amplitudofrekvenční charakteristika, dynamický tlumič.

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

LUKY, R. *Modelování kmitání dynamické soustavy s n -stupni volnosti*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 41 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Daniel Dušek, Ph.D.

ABSTRACT

This Bachelor's thesis deals with vibration of dynamic systems with luminous parameters with n -degrees of freedom. It features decision procedures of free-running undamped systems, exciting undamped systems, exciting damped systems and their natural shapes, natural frequency and gain-frequency characteristic. At the end of this Bachelor thesis there is an analysis of dynamic damper. The analysis is conducted in agreement with the theoretical procedures listed above.

KEYWORDS

Natural frequency, vibration of dynamic system, gain-frequency characteristic, dynamic damper.

BIBLIOGRAPHIC CITATION

LUKY, R. *Modelling of vibration of dynamic systems with n -degrees of freedom*. Brno: Brno University of Technology, Faculty of Mechanical Engineering, 2010. 41 pgs. Supervisor Ing. Daniel Dušek, Ph.D.

ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že tuto bakalářskou práci *Modelování kmitání dynamické soustavy s n -stupni volnosti* jsem vypracoval a napsal samostatně, pod vedením Ing. Daniela Duška, Ph.D. a uvedl v seznamu literatury všechny literární a odborné zdroje.

V Brně dne 17.5.2010

vlastnoruční podpis autora

PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych chtěl poděkovat Ing. Danielu Duškovi, Ph.D. za odborné vedení mé práce, poskytnutou literaturu a za cenné rady a připomínky, kterými přispěl k vypracování této bakalářské práce.

OBSAH

OBSAH	11
ÚVOD	12
1 TEORIE	13
1.1 Soustavy a jejich rozdělení	13
1.2 Buzení soustav se soustředěnými parametry	14
1.3 Základní druhy pohybů	15
1.4 Metody řešení kmitání soustav se soustředěnými parametry	15
1.5 Maticový zápis soustavy pohybových rovnic	17
1.6 Matematické vztahy použitelné pro problematiku kmitání	18
2 VOLNÉ NETLUMENÉ KMITÁNÍ	19
2.1 Výpočet vlastních frekvencí a vektorů	19
2.2 Ortogonalita vlastních vektorů	21
3 NETLUMENÉ KMITÁNÍ BUZENÉ HARMONICKOU SILOU	22
4 TLUMENÉ KMITÁNÍ BUZENÉ HARMONICKOU SILOU	24
4.1 Proporcionální tlumení	24
4.2 Amplitudofrekvenční charakteristika tlumeného kmitání buzeného harmonickou silou	26
5 ŘEŠENÝ PŘÍKLAD	28
5.1 Sestavení pohybových rovnic pro zadanou soustavu	28
5.2 Vyjádření vlastních tvarů kmitání volného netlumeného pohybu soustavy	30
5.3 Sestrojení amplitudofrekvenční charakteristiky netlumené soustavy s harmonickým buzením	32
5.4 Sestrojení amplitudofrekvenční charakteristiky tlumené soustavy s harmonickým buzením	34
6 ZÁVĚR	37
7 SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ	38
8 SEZNAM POUŽITÝCH VELIČIN	39
9 SEZNAM OBRÁZKŮ A GRAFŮ	40
10 SEZNAM PŘÍLOH	41

ÚVOD

V technické praxi se setkáváme s mnoha strojními zařízeními, které slouží pro vykonávání práce anebo k transformaci jednoho druhu energie na druhý dle naší potřeby. Tato zařízení mohou být poháněna zdroji, které podléhají dynamickým účinkům; např. elektromotory, turbíny, spalovací motory apod. Takové soustavy pracovních strojů jsou opakovaně (periodicky) zatěžovány silovými a setrvačnými účinky, které vyvolávají chvění - souhrnně nazýváme kmitání. Pro lepší posouzení těchto účinků je nutné toto kmitání analyzovat. Získáme tak komplexní informace, které použijeme pro posouzení životnosti, opotřebení a namáhání součástí strojních zařízení, popřípadě hlučnosti a tím i vliv na životní prostředí. Dále je vhodné na základě těchto informací provést opatření pro snížení nežádoucích vibrací prostřednictvím pružin a tlumičů. Poté následuje zjišťování vlastních frekvencí a tvarů, které je nutné z hlediska stanovení bezpečnosti u součástí namáhaných cyklickým harmonickým zatížením. Nejužívanější charakteristikou pro posouzení nebezpečné frekvence je amplitudo-frekvenční charakteristika, která tuto frekvenci graficky zobrazuje ve formě vrcholu na vykreslené křivce. Pro získání této charakteristiky u dynamických soustav je nutné znát postupy řešení, které vychází ze soustav pohybových rovnic a je zapotřebí je transformovat a řešit pomocí maticových počtů.

„Řešení kmitání soustav s více stupni volnosti je bez výpočetní techniky velmi pracné. Při použití moderní výpočetní techniky lze řešit i složité mechanické soustavy s mnoha stupni volnosti velmi rychle a pohodlně, poněvadž lze použít standardních procedur pro práci s maticemi, numerickou integraci, řešení vlastního problému symetrických i nesymetrických matic apod.“ [3]

1 TEORIE

1.1 Soustavy a jejich rozdělení

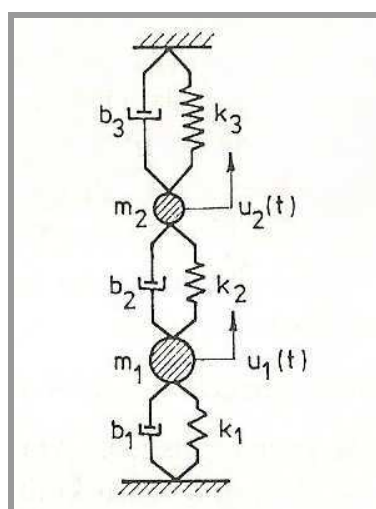
Soustavy obecně rozdělujeme do dvou základních skupin:

- a) soustavy se soustředěnými (diskrétními) parametry
- b) soustavy se spojitě rozloženými parametry

Ad a)

Vyznačují se tím, že mají konečný počet stupňů volnosti, obsahují jednoduché prvky jako jsou hmotné body, hmotná tělesa, nehmotné pružiny a tlumiče. Každý z těchto prvků je nositelem konkrétní energie, která může být buďto kinetická (hmotné body a tělesa), potenciální (pružiny) nebo disipativní (tlumiče). Tyto soustavy mohou vykonávat kmitavý pohyb podélný, ohybový anebo torzní a mohou nebo nemusí obsahovat tlumící prvky.

„Výpočtové modely se soustředěnými parametry s více stupni volnosti umožňují řešit složité úlohy technické praxe, tj. stanovit s dostatečnou přesností vlastní frekvence a vlastní tvary kmitání nejrozličnějších konstrukcí všude tam, kde analytické řešení v uzavřeném tvaru vycházející ze spojitých modelů není proveditelné. Pohybové rovnice diskrétních modelů jsou dány zpravidla soustavami obyčejných lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. K jejich řešení se využívá pravidel maticové algebry, což usnadňuje nasazení počítačů při numerických výpočtech.“ [1]



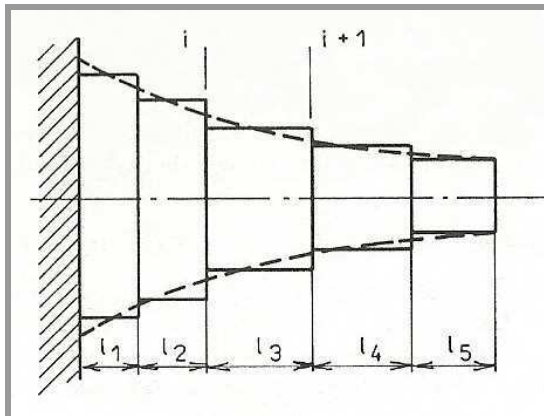
Obr. 1.1.1 Model tlumené soustavy se dvěma stupni volnosti [1]

Ad b)

Do této skupiny soustav řadíme struny, lana, tyče apod. Zmíněná tělesa můžeme rozdělit na libovolný počet úseků, který může být roven nekonečnu. Proto můžeme říci, že soustavy se spojitě rozloženými parametry mají nekonečný počet stupňů volnosti a platí, že tento počet je roven počtu nezávislých souřadnic, které jsou nutné k určení polohy soustavy.

Pomocí následujících způsobů je možno převést spojitý výpočtový model na model se soustředěnými parametry [1]:

- a) přímou fyzikální diskretizací kontinua
- b) metodou konečných prvků
- c) metodou hraničních prvků



Obr. 1.1.2 Soustava se spojitě rozloženými parametry - nosník proměnného průřezu [4]

Dále se tato práce bude zabývat pouze soustavami se soustředěnými parametry.

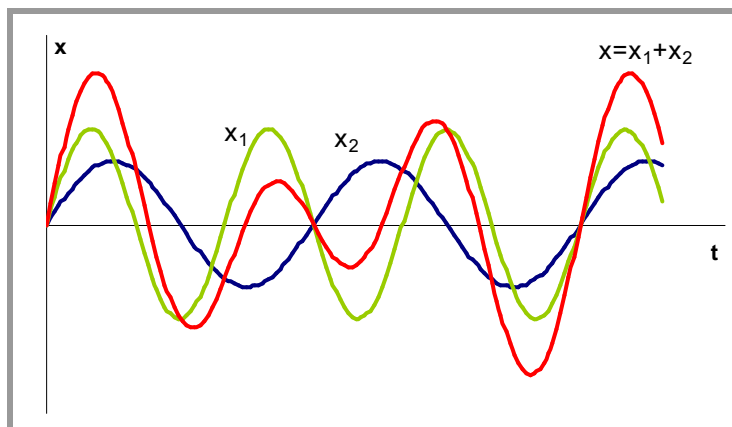
1.2 Buzení soustav se soustředěnými parametry

Soustavy se soustředěnými parametry se budí buzením:

- a) deterministickým
- b) stochastickým (náhodným)

Ad a)

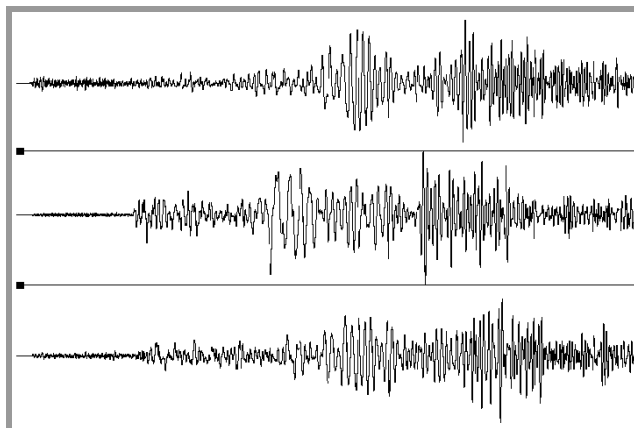
Deterministické buzení může být periodické, které lze rozložit do formy Fourierových řad nebo harmonické, které je nejjednodušším případem a je možné ho popsat jednoduchou funkcí (sinus, kosinus).



Obr. 1.2.1 Graf průběhu deterministického buzení

Ad b)

Stochastické čili neperiodické buzení nelze obecně popsat žádnou z matematických funkcí. Vzniká například při seismických otřesech půdy, při buzení náhodným signálem z počítače apod.



Obr. 1.2.2 Graf průběhu stochastického buzení [5]

1.3 Základní druhy pohybů

Na základě informací o zdroji buzení a vyřešením pohybových rovnic lze rozlišit tyto druhy pohybů:

a) volné vlastní kmitání

Vzniká vychýlením soustavy z rovnováhy a následně ponecháním v daném pohybu bez působení vnějších sil. Vychýlení z rovnováhy nastane, udělíme-li jednomu nebo více tělesům soustavy rychlost, výchylku nebo obojí zároveň. Výpočtem pak získáme informace o vlastních frekvencích, popřípadě číslech [1].

b) vynucené kmitání při periodickém nebo harmonickém buzení

Vzniká při časově proměnném působení účinků vnějších nebo vnitřních zátěžných sil anebo je-li soustava buzena kinematicky. Pokud jsou tyto síly působící na soustavu periodické nebo jedná-li se o periodické kinematické buzení nazýváme toto ustáleným vynuceným kmitáním [1].

c) přechodový proces

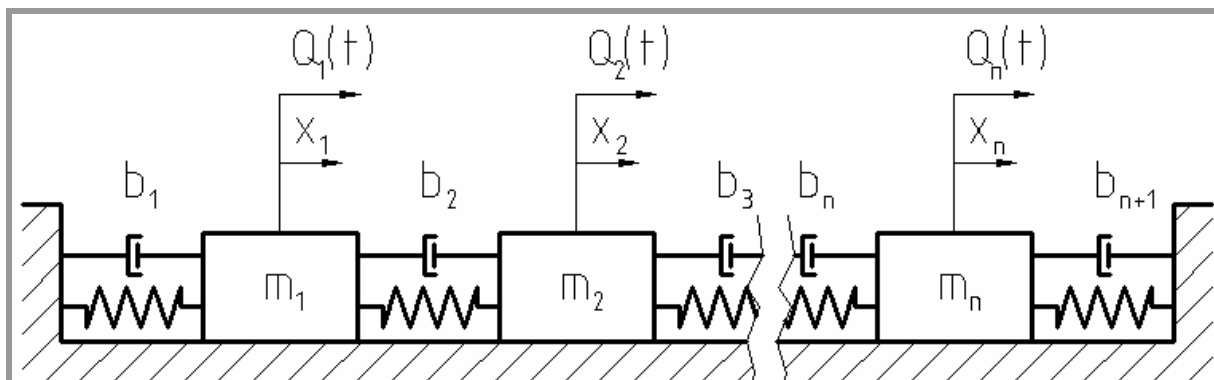
Vzniká při změnách silových účinků působících na soustavu a zaniká prostřednictvím tlumičů [1].

d) náhodné kmitání při náhodném buzení

1.4 Metody řešení kmitání soustav se soustředěnými parametry

Vytvořený model s n -stupni volnosti dle obr. 1.4.1, představuje lineární soustavu, která je tvořena n -posouvajícími se tělesy o hmotnostech m_1, m_2, \dots, m_n . Tělesa jsou navzájem i k rámu vázána lineárními tlumiči o součiniteli tlumení b_1, b_2, \dots, b_{n+1} a lineárními pružinami o tuhostech k_1, k_2, \dots, k_{n+1} . Časově proměnná síla $Q_i(t)$ působí na každé z hmotných těles, pro

kteřá platí $i=1, 2, \dots, n$. Za zobecněné souřadnice volíme x_1, x_2, \dots, x_n , což jsou výchylky ze stabilní rovnovážné polohy, které se nemění, pokud jsou síly působící na soustavu nulové. Počet souřadnic je tolik, kolik má soustava stupňů volnosti a platí pro ně, že jsou lineárně nezávislé [2].



Obr. 1.4.1 Model buzené tlumené soustavy s n stupni volnosti [2]

Řešení spočívá v sestavení pohybových rovnic, které je možné provést několika způsoby.

Nejběžnější způsoby jsou:

- metoda uvolňování
- metoda použití Lagrangeových rovnic 2. druhu

Ad a) metoda uvolňování

$$\begin{aligned}
 -b_1 \cdot \dot{x}_1 - b_2 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1 \cdot x_1 - k_2 \cdot (x_1 - x_2) + Q_1(t) &= m_1 \cdot \ddot{x}_1 \\
 -b_2 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - b_3 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_2 \cdot (x_1 - x_2) - k_3 \cdot (x_2 - x_3) + Q_2(t) &= m_2 \cdot \ddot{x}_2 \\
 \dots & \\
 \dots & \\
 -b_n (\dot{x}_{n-1} - \dot{x}_n) - b_{n+1} \cdot \dot{x}_n + k_n \cdot (x_{n-1} - x_n) - k_{n+1} \cdot x_n + Q_n(t) &= m_n \cdot \ddot{x}_n
 \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

Ad b) metoda použití Lagrangeových rovnic 2. druhu

Lagrangeovy rovnice 2. druhu používáme ve tvaru:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial x_j} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial E_P}{\partial x_j} = Q_j(t) \quad \text{pro } (j=1, 2, \dots, n) \tag{1.4.2}$$

$$E_K = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^n m_j \cdot \dot{x}_j^2 \tag{1.4.3}$$

$$E_D = \frac{1}{2} \cdot \left[b_1 \cdot \dot{x}_1^2 + b_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \dots + b_j \cdot (\dot{x}_j - \dot{x}_{j-1})^2 + \dots + b_{n+1} \cdot \dot{x}_n^2 \right] \tag{1.4.4}$$

$$E_P = \frac{1}{2} \cdot \left[k_1 \cdot x_1^2 + k_2 \cdot (x_2 - x_1)^2 + \dots + k_j \cdot (x_j - x_{j-1})^2 + \dots + k_{n+1} \cdot x_n^2 \right] \tag{1.4.5}$$

E_K - kinetická energie soustavy

E_D - disipativní funkce soustavy

E_P - potenciální energie

x - výchylka

\dot{x} - rychlost

\ddot{x} - zrychlení

Při použití jedné nebo druhé metody získáme tutéž soustavu pohybových rovnic v upraveném tvaru:

$$\begin{aligned}
 m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (b_1 + b_2) \cdot \dot{x}_1 - b_2 \cdot \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) \cdot x_1 - k_2 \cdot x_2 &= Q_1(t) \\
 m_2 \cdot \ddot{x}_2 - b_2 \cdot \dot{x}_1 + (b_2 + b_3) \cdot \dot{x}_2 - b_3 \cdot \dot{x}_3 - k_2 \cdot x_1 + (k_2 + k_3) \cdot x_2 - k_3 \cdot x_3 &= Q_2(t) \\
 \dots & \\
 \dots & \\
 m_n \cdot \ddot{x}_n - b_n \cdot \dot{x}_{n-1} + (b_n + b_{n+1}) \cdot \dot{x}_n - k_n \cdot x_{n-1} + (k_n + k_{n+1}) \cdot x_n &= Q_n(t)
 \end{aligned}
 \tag{1.4.6}$$

1.5 Maticový zápis soustavy pohybových rovnic

Pohyb soustavy s n-stupni volnosti je popsán n-diferenciálními rovnicemi druhého řádu, které jsou při velkém počtu stupňů volnosti velmi obtížně řešitelné. Z tohoto důvodu upřednostňujeme maticový zápis, pomocí kterého zapíšeme soustavu rovnic v jedinou maticovou rovnici [2].

Tuto rovnici pak řešíme pomocí maticového počtu, který v dnešní době s výhodou přenecháváme počítačovým matematickým programům.

Maticový zápis:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{Q}(t) \tag{1.5.1}$$

\mathbf{x} - vektor výchylek $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$

$\dot{\mathbf{x}}$ - vektor rychlostí

$\ddot{\mathbf{x}}$ - vektor zrychlení

\mathbf{M} - matice hmotnosti; čtvercová matice řádu n, která je pro mechanickou soustavu podle obr. 1.4.1 diagonální a její tvar je:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \\ \dots & & & \dots & \\ 0 & 0 & & & m_n \end{bmatrix}$$

\mathbf{B} - matice tlumení; symetrická čtvercová matice řádu n, která má pro zvolenou soustavu tvar:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 & 0 & \dots & 0 \\ -b_2 & b_2 + b_3 & -b_3 & & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ \dots & & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -b_n & b_n + b_{n+1} \end{bmatrix}$$

K - matice tuhosti; má stejný tvar jako matice tlumení z důvodu paralelního řazení tlumiče a pružiny:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ \dots & & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{bmatrix}$$

Q(t) - vektor budících sil

$$\mathbf{Q}(t) = [Q_1, Q_2, \dots, Q_n]^T$$

1.6 Matematické vztahy použitelné pro problematiku kmitání

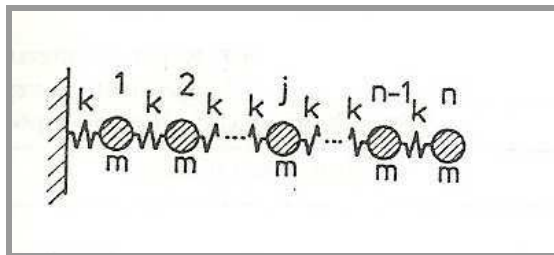
Pro různé typy soustav můžeme také zjišťovat frekvence kmitání f z vypočtených úhlových frekvencí:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.6.1)$$

Dále lze z frekvence kmitání určit dobu periody T :

$$T = \frac{1}{f} \quad (1.6.2)$$

2 VOLNÉ NETLUMENÉ KMITÁNÍ



Obr. 2.1 Model netlumené soustavy n hmot m a n tuhostí k [1]

2.1 Výpočet vlastních frekvencí a vektorů

Při řešení volného netlumeného kmitání budeme uvažovat rovnici (1.5.1), pro kterou platí, že buzení ($\mathbf{Q}(t)=0$) a tlumení ($\mathbf{B}=0$) jsou nulové, ve tvaru [2]:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (2.1.1)$$

Předpokládáme-li počáteční podmínky dané vektory $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0$, pak rovnici (2.1.1) vyhovuje řešení:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v} \cdot e^{i\Omega t}, \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{v} \cdot \Omega^2 \cdot e^{i\Omega t}, \quad \mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T, \quad (2.1.2)$$

kde \mathbf{v} je neznámý vektor amplitud harmonických kmitů a Ω úhlová frekvence. Dosazením $\mathbf{x}(t)$ a $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ ve tvaru (2.1.2) do rovnice (2.1.1) dostaneme [4]:

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.1.3)$$

Rovnice (2.1.3) představuje *problém vlastních hodnot* (ten je definován jako určení vlastních frekvencí a vlastních vektorů matematického modelu (2.1.1)). Je-li alespoň jedna souřadnice vektoru \mathbf{v} nenulová, získáme netriviální řešení rovnice (2.1.3), které existuje jen tehdy, pokud je determinant matice $\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}$ roven nule [4]:

$$\det|\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (2.1.4)$$

Determinant rovnice (2.1.4) nazýváme *frekvenční determinant*, jehož rozvinutím obdržíme frekvenční rovnici n -tého stupně pro Ω^2 [2]:

$$a_n \Omega^{2n} + a_{n-1} \Omega^{2(n-1)} + \dots + a_1 \Omega^2 + a_0 = 0 \quad (2.1.5)$$

Kořeny $\lambda_v = \Omega_{0v}^2$ charakteristické rovnice (2.1.4) nazýváme *vlastní čísla*, která jsou nezáporná z důvodu symetrie a pozitivní definitnosti (semidefinitnosti) matic \mathbf{M} , \mathbf{K} . Ke každým získaným *vlastním úhlovým frekvencím* $\Omega_{0v} = +\sqrt{\lambda_v}$, které řadíme zpravidla vzestupně $0 \leq \Omega_{01} \leq \Omega_{02} \leq \dots \leq \Omega_{0n}$, přiřazujeme *vlastní vektor* \mathbf{v}_v za předpokladu, že nulita matice $\mathbf{K} - \lambda_v \mathbf{M}$ je rovna násobnosti vlastního čísla λ_v . Vlastní vektor pak splňuje rovnici (2.1.3) a popisuje vlastní tvar kmitání. Tedy [4]:

$$(\mathbf{K} - \Omega_{0v}^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{v}_v = 0, \quad v = 1, 2, \dots, n \quad (2.1.6)$$

Dosadíme-li do této homogenní soustavy rovnic určitou vlastní úhlovou frekvenci, dostaneme nekonečné množství řešení pro \mathbf{v}_v . Z toho důvodu je možné určit jen vzájemné poměry prvků vlastního vektoru \mathbf{v}_v , např. [3]:

$$\mathbf{v}_v = \left[\frac{v_{v1}}{v_{v1}}, \frac{v_{v2}}{v_{v1}}, \dots, \frac{v_{vn}}{v_{v1}} \right]^T \quad (2.1.7)$$

Tímto způsobem lze získat n-různých posloupností, které definují *vlastní tvar* kmitání jímž soustava volně kmitá vlastní úhlovou frekvencí Ω_{0v} . Protože se jedná o posloupnosti, které zapisujeme do vektoru, nazýváme vlastní tvary též *vlastní vektory* nebo *modální vektory*. Z těchto posloupností volíme takovou, u které je maximální hodnota vektoru rovna jedné. Tuto operaci nazýváme *normování*. Při normování požadujeme, aby platilo [3]:

$$\mathbf{v}_v^T \mathbf{v}_v = 1 \quad (\text{Euklidova norma}) \quad (2.1.8)$$

nebo

$$\mathbf{v}_v^T \mathbf{M} \mathbf{v}_v = 1 \quad (\text{Normujeme podle matice hmotnosti}) \quad (2.1.9)$$

nebo

$$\mathbf{v}_v^T \mathbf{K} \mathbf{v}_v = 1 \quad (\text{Normujeme podle matice tuhosti}) \quad (2.1.10)$$

Jestliže soustava kmitá v-tým tvarem, jsou jednotlivé výchylky dány rovnicemi

$$\mathbf{x}_v = \mathbf{v}_v e^{i\Omega_{0v}t} \quad (2.1.11)$$

nebo v reálném oboru [3]

$$\mathbf{x}_v = \mathbf{v}_v \sin(\Omega_{0v}t + \varphi_v) \quad (2.1.12)$$

Z rovnic (2.1.11) a (2.1.12) je patrné, že se výchylky během kmitání nemění, poněvadž amplitudy pohybu všech těles jsou konstantní. Lineární kombinací jednotlivých vlastních tvarů kmitů dostaneme obecné řešení rovnice (2.1.1)

$$\tilde{\mathbf{x}} = \sum_{v=1}^n \tilde{C}_v \mathbf{v}_v e^{i\Omega_{0v}t}, \quad (2.1.13)$$

kde \tilde{C}_v jsou komplexní integrační konstanty. Rovnice (2.1.13) má v reálném oboru tvar

$$\mathbf{x} = \sum_{v=1}^n C_v \mathbf{v}_v \sin(\Omega_{0v}t + \varphi_v) \quad (2.1.14)$$

nebo

$$\mathbf{x} = \sum_{v=1}^n \mathbf{v}_v (A_v \cos \Omega_{0v}t + B_v \sin \Omega_{0v}t) \quad (2.1.15)$$

Integrační konstanty C_v , φ_v , A_v , B_v pro $v=1, 2, \dots, n$ se určí z počátečních podmínek ($t=0$, $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$, $\dot{\mathbf{x}}=\dot{\mathbf{x}}_0$) [3].

Vlastní vektory jednotlivých tvarů kmitů, které jsme získali, lze sestavit do takzvané *modální matice* [3]:

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdot & \cdot & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdot & \cdot & v_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdot & \cdot & v_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.1.16)$$

Vlastní úhlové frekvence lze sestavit do *spektrální matice*, kde zaujímají pozice na hlavní diagonále [3]:

$$\mathbf{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \Omega_{01}^2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \Omega_{02}^2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \Omega_{0n}^2 \end{bmatrix} \quad (2.1.17)$$

2.2 Ortogonalita vlastních vektorů

Na základě předpokladu, že mechanická soustava má dvě různé vlastní frekvence Ω_{0v}^2 a Ω_{0s}^2 , lze rovnici (2.1.3) psát ve tvaru [2]:

$$(\mathbf{K} - \Omega_{0v}^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{v}_v = 0 \quad (2.2.1a)$$

$$(\mathbf{K} - \Omega_{0s}^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{v}_s = 0 \quad (2.2.1b)$$

Postupně vynásobíme prvou z těchto rovnic zleva vektorem \mathbf{v}_s^T a druhou vektorem \mathbf{v}_v^T [2]:

$$\mathbf{v}_s^T (\mathbf{K} - \Omega_{0v}^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{v}_v = 0 \quad (2.2.2a)$$

$$\mathbf{v}_v^T (\mathbf{K} - \Omega_{0s}^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{v}_s = 0 \quad (2.2.2b)$$

Transponujeme druhou z těchto rovnic, přičemž víme, že pro symetrické matice platí [2]:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^T \text{ a } \mathbf{M} = \mathbf{M}^T \quad (2.2.3a,b)$$

$$\mathbf{v}_s^T (\mathbf{K} - \Omega_{0s}^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{v}_v = 0 \quad (2.2.3c)$$

Tuto rovnici odečteme od první z předchozí dvojice rovnic, takže po úpravě obdržíme [3]:

$$(\Omega_{0s}^2 - \Omega_{0v}^2) \mathbf{v}_s^T \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_v = 0 \quad (2.2.4)$$

Z předpokladu, že $\Omega_{0v}^2 \neq \Omega_{0s}^2$, musí platit:

$$\mathbf{v}_s^T \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_v = 0 \quad (2.2.5a)$$

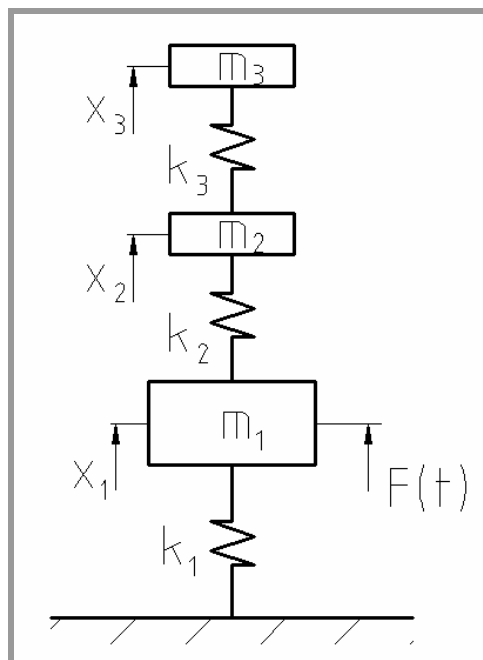
a obdobně pro $v \neq s$

$$\mathbf{v}_s^T \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_v = 0 \quad (2.2.5b)$$

Z rovnic (2.2.5a) a (2.2.5b) plyne věta:

„Vlastní vektory, příslušné různým vlastním úhlovým frekvencím jsou ortogonální vzhledem k matici hmotnosti i k matici tuhosti.“ [2]

3 NETLUMENÉ KMITÁNÍ BUZENÉ HARMONICKOU SILOU



Obr. 3.1 Schéma netlumené buzené soustavy se třemi stupni volnosti

Při řešení netlumeného buzeného kmitání vycházíme z rovnice (1.5.1), pro kterou je matice tlumení nulová ($\mathbf{B}=0$). Pohybová rovnice má tvar:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{Q}(t) \quad (3.1)$$

Harmonickou budící sílu budeme předpokládat ve tvaru:

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_0 e^{i\omega t} \quad (3.2)$$

Obecné řešení této rovnice se skládá z řešení rovnice homogenní a řešení rovnice partikulární [2]:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p \quad (3.3)$$

Homogenní řešení je dáno rovnicí (2.1.14) a partikulární řešení je závislé na vektoru budících sil. Pro případ buzení harmonickou silou, budeme toto partikulární řešení uvažovat ve tvaru [3]:

$$\mathbf{x}_p = \tilde{\mathbf{s}} e^{i\omega t}, (\dot{\mathbf{x}}_p = i\omega \tilde{\mathbf{s}} e^{i\omega t}, \ddot{\mathbf{x}}_p = -\omega^2 \tilde{\mathbf{s}} e^{i\omega t}) \quad (3.4)$$

kde $\tilde{\mathbf{s}}$ je komplexní vektor amplitud.

Protože se jedná o netlumené buzené kmitání, imaginární část komplexního vektoru amplitud je nulová, bude tento vektor nazýván pouze jako *vektor amplitud* s označením \mathbf{s} . Partikulární řešení má poté tvar:

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{s} e^{i\omega t}, (\dot{\mathbf{x}}_p = i\omega \mathbf{s} e^{i\omega t}, \ddot{\mathbf{x}}_p = -\omega^2 \mathbf{s} e^{i\omega t}) \quad (3.5)$$

Dosazením rovnice (3.5) do rovnice (3.1) a dalším upravením obdržíme [3]:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{s} = \mathbf{Q}_0 \quad (3.6)$$

Z této rovnice můžeme určit vektor amplitud odezvy

$$\mathbf{s} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{Q}_0, \quad \mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_n]^T, \quad (3.7)$$

kde hodnoty amplitud odezvy jsou dány vztahem [3]

$$s_{0v} = \sqrt{(s_v)^2}, \quad \text{pro } v = 1, 2, \dots, n \quad (3.8)$$

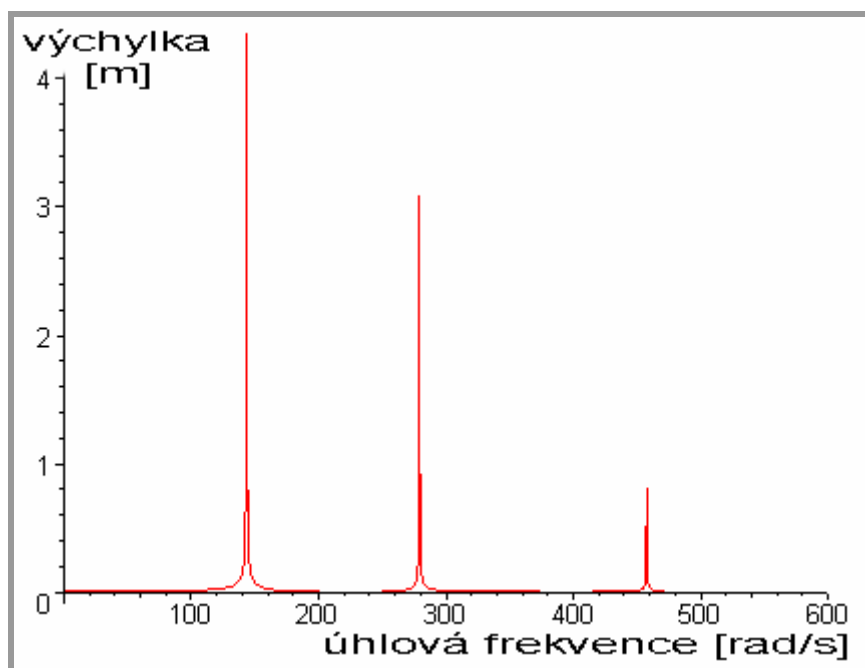
Odpovídající fáze mezi reálnou a imaginární částí komplexního vektoru amplitud je nulová s přeskoky o 180 stupňů v oblastech rezonančních frekvencí.

Odezvu soustavy buzené harmonickou silou lze vyjádřit rovnicí:

$$\mathbf{x} = \sum_{v=1}^n [C_v \mathbf{v}_v \sin(\Omega_{0v} t + \varphi_v) + \mathbf{s}_v \sin(\omega t)] \quad (3.9)$$

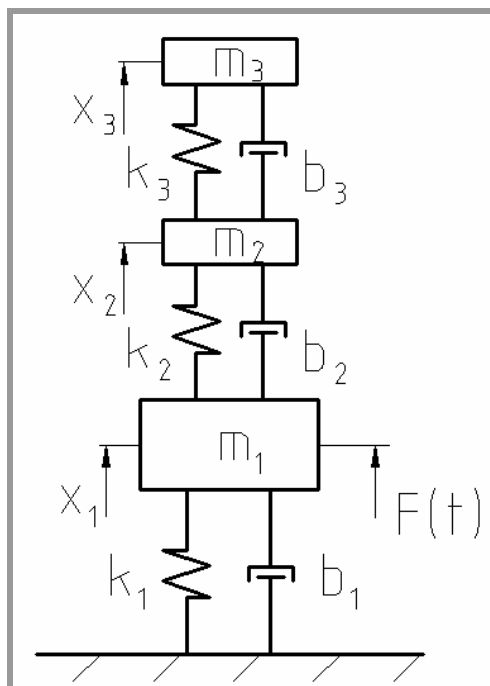
Z počátečních podmínek je nutné učít integrační konstanty C_v, φ_v .

Výsledkem řešení je grafické vyjádření amplitud vektoru \mathbf{x} v závislosti na úhlové frekvenci ω .



Obr. 3.2 Amplitudofrekvenční charakteristika tělesa buzené netlumené soustavy se třemi stupni volnosti

4 TLUMENÉ KMITÁNÍ BUZENÉ HARMONICKOU SILOU



Obr. 4.1 Schéma buzené tlumené soustavy se třemi stupni volnosti

4.1 Proporcionální tlumení

Nejdříve se musíme zaměřit na volné kmitání tlumené soustavy vycházející z pohybové rovnice (1.5.1), ve které položíme $Q(t) = 0$:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (4.1.1)$$

Matice tlumení \mathbf{B} je čtvercová matice řádu n . Sestavování této matice je obtížné, poněvadž tlumící konstanty nejsou zpravidla známy a jejich určení je velmi náročné. Z toho důvodu se zavedl pojem *proporcionální tlumení*, který dává matici tlumení do vztahu s maticí hmotnosti a tuhosti a je vyjádřen rovnicí:

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (4.1.2)$$

Člen $\alpha \mathbf{M}$ v této rovnici představuje konstrukční tlumení, které je funkcí hmotností kmitající soustavy. Člen $\beta \mathbf{K}$ vystihuje materiálové tlumení, které je, podobně jako tuhost pružných prvků soustavy, funkcí vnitřních materiálových vlastností [3].

Podmínky ortogonalit jsou dány vztahy (2.2.5a) a (2.2.5b) a k nim přistoupí ještě podmínka [2]

$$\mathbf{v}_v^T \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_s = 0 \quad \text{pro } v \neq s \quad (4.1.3)$$

Při řešení diferenciální rovnice (4.1.1) budeme předpokládat netlumený pohyb ($\alpha = \beta = 0$) vycházející z rovnice (2.1.13) ve tvaru:

$$\mathbf{x} = \sum_{v=1}^n C_v e^{\lambda_v t} \mathbf{v}_v, \quad \left(\dot{\mathbf{x}} = \sum_{v=1}^n \lambda_v C_v e^{\lambda_v t} \mathbf{v}_v, \quad \ddot{\mathbf{x}} = \sum_{v=1}^n \lambda_v^2 C_v e^{\lambda_v t} \mathbf{v}_v \right) \quad (4.1.4)$$

kde \mathbf{v}_v představuje vlastní vektor netlumeného pohybu [2].

Dosadíme-li rovnici (4.1.4) do rovnice (4.1.1) dostaneme [2]:

$$\mathbf{M} \sum_{v=1}^n \lambda_v^2 C_v e^{\lambda_v t} \mathbf{v}_v + \mathbf{B} \sum_{v=1}^n \lambda_v C_v e^{\lambda_v t} \mathbf{v}_v + \mathbf{K} \sum_{v=1}^n C_v e^{\lambda_v t} \mathbf{v}_v = 0 \quad (4.1.5)$$

Vynásobením této rovnice zleva transponovaným vektorem \mathbf{v}_s^T a využitím podmínek ortogonality odstraníme z této rovnice sumace. Po úpravě získáme rovnici ve tvaru [2]:

$$C_v (\mathbf{v}_v^T \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_v \lambda_v^2 + \mathbf{v}_v^T \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_v \lambda_v + \mathbf{v}_v^T \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_v) e^{\lambda_v t} = 0 \quad \text{pro } v = 1, 2, \dots, n \quad (4.1.6)$$

Poněvadž tato rovnice musí platit nezávisle na čase, pro netriviální řešení platí, že se výraz v závorce musí rovnat nule. Označíme-li

$$m_{yv} = \mathbf{v}_v^T \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_v, \quad (4.1.7)$$

$$k_{yv} = \mathbf{v}_v^T \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_v \quad (4.1.8)$$

a matici tlumení uvažujeme ve tvaru rovnice (4.1.2), obdržíme n-nezávislých rovnic [3]:

$$m_{yv} \lambda_v^2 + (\alpha m_{yv} + \beta k_{yv}) \lambda_v + k_{yv} = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n) \quad (4.1.9)$$

Kořeny λ_v vyjádříme z předchozí rovnice:

$$(\lambda_v)_{1,2} = -\delta_v \pm i\Omega_v, \quad (4.1.10)$$

kde [2]:
$$\delta_v = \frac{\alpha m_{yv} + \beta k_{yv}}{2m_{yv}}, \quad \Omega_v = \sqrt{\Omega_{0v}^2 - \delta_v^2}, \quad \Omega_{0v} = \sqrt{\frac{k_{yv}}{m_{yv}}}$$

Z rovnice (4.1.10) je patrné, že ke každému vlastnímu vektoru \mathbf{v}_v náleží dvě vlastní hodnoty λ_v . Z rovnice (4.1.4) získáme obecné řešení [3]:

$$\mathbf{x} = \sum_{v=1}^n (C_{1v} e^{\lambda_{v1} t} + C_{2v} e^{\lambda_{v2} t}) \mathbf{v}_v \quad (4.1.11)$$

Pro $\delta_v < \Omega_{0v}$ budou kořeny λ_v komplexně sdružené. Výsledný pohyb bude periodický, vyjádřený rovnicemi [3]:

$$\mathbf{x} = \sum_{v=1}^n C_v e^{-\delta_v t} \sin(\Omega_v t + \varphi_v) \mathbf{v}_v \quad (4.1.12)$$

nebo

$$\mathbf{x} = \sum_{v=1}^n e^{-\delta_v t} (A_v \cos \Omega_v t + B_v \sin \Omega_v t) \mathbf{v}_v \quad (4.1.13)$$

Hodnoty C_{1v} , C_{2v} , A_v , B_v , C_v a φ_v představují integrační konstanty, které určíme z počátečních podmínek ($t = 0$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_0$) [3].

4.2 Amplitudofrekvenční charakteristika tlumeného kmitání buzeného harmonickou silou

Při řešení vynuceného tlumeného kmitání, se kterým se v praxi nejčastěji setkáváme, uvažujeme úplný tvar rovnice (1.5.1):

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{Q}(t) \quad (4.2.1)$$

Harmonické buzení budeme předpokládat ve tvaru:

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_0 e^{i\omega t} \quad (4.2.2)$$

Obdrželi jsme soustavu diferenciálních rovnic druhého řádu s pravou stranou, která se skládá z homogenního a partikulárního řešení [3]:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p \quad (4.2.3)$$

Homogenní řešení vychází z rovnice (4.1.12) a partikulární řešení s ohledem na harmonický průběh budících sil, který je vyjádřen rovnicí (4.2.2), má tvar [3]:

$$\mathbf{x}_p = \tilde{\mathbf{s}} e^{i\omega t}, (\dot{\mathbf{x}}_p = i\omega \tilde{\mathbf{s}} e^{i\omega t}, \ddot{\mathbf{x}}_p = -\omega^2 \tilde{\mathbf{s}} e^{i\omega t}) \quad (4.2.4)$$

Vektor $\tilde{\mathbf{s}}$ představuje *komplexní vektor amplitud*. Dosazením rovnice (4.2.4) do rovnice (4.2.1) získáme po úpravě [3]:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B}) \tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{Q}_0 \quad (4.2.5)$$

Jednoduchou matematickou operací vyjádříme z této rovnice komplexní vektor amplitud odezvy

$$\tilde{\mathbf{s}} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B})^{-1} \mathbf{Q}_0 \quad (4.2.6)$$

Je vhodné zvolit další způsob řešení tak, abychom se vyhnuli práci s komplexními čísly.

Pro práci pouze s reálnými čísly se budeme držet následujícího postupu:

Reálnou část označme:

$$\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} = \mathbf{A} \quad (4.2.7)$$

a imaginární část [3]:

$$\omega \mathbf{B} = \mathbf{D} \quad (4.2.8)$$

Následně provedeme inverzi dynamické matice tuhosti, čímž opět obdržíme reálnou a imaginární část [3]:

$$(\mathbf{A} + i\mathbf{D})^{-1} = (\mathbf{L} + i\mathbf{N}) \quad (4.2.9)$$

Pokud vynásobíme levou stranu této rovnice maticí dynamické tuhosti $(\mathbf{A} + i\mathbf{D})$, obdržíme jednotkovou matici [3]:

$$\mathbf{E} = (\mathbf{A} + i\mathbf{D})(\mathbf{L} + i\mathbf{N}) \quad (4.2.10)$$

Vzájemným vynásobením matic dle předchozího zápisu získáme [3]:

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}\mathbf{L} - \mathbf{D}\mathbf{N} + i(\mathbf{A}\mathbf{N} + \mathbf{D}\mathbf{L}) \quad (4.2.11)$$

Z předchozí rovnice vidíme, že reálná a imaginární část je rovna [3]:

$$\mathbf{A}\mathbf{L} - \mathbf{D}\mathbf{N} = \mathbf{E} \quad (4.2.12a)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{N} + \mathbf{D}\mathbf{L} = \mathbf{0} \quad (4.2.12b)$$

Soustavu zapsaná maticově má tvar [3]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{D} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.2.13)$$

Členy inverzní matice dynamické tuhosti získáme, invertujeme-li matici řádu $2n$ [3]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{D} & \mathbf{A} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.2.14)$$

Rovnici (4.2.6) můžeme psát ve tvaru:

$$\tilde{\mathbf{s}} = (\mathbf{L} + i\mathbf{N})\mathbf{Q}_0 = \mathbf{s}_0 e^{i\varphi_p}, \quad (4.2.15)$$

kde následující vztah vyjadřuje reálné hodnoty amplitud odezvy:

$$s_{0v} = \sqrt{(\operatorname{Re}\{\tilde{s}_v\})^2 + (\operatorname{Im}\{\tilde{s}_v\})^2} \quad \text{pro } v = 1, 2, \dots, n \quad (4.2.16)$$

a odpovídající fáze (posunutí) mezi budící silou a odezvou [3]:

$$\varphi_{pv} = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}\{\tilde{s}_v\}}{\operatorname{Re}\{\tilde{s}_v\}} \quad \text{pro } v = 1, 2, \dots, n \quad (4.2.17)$$

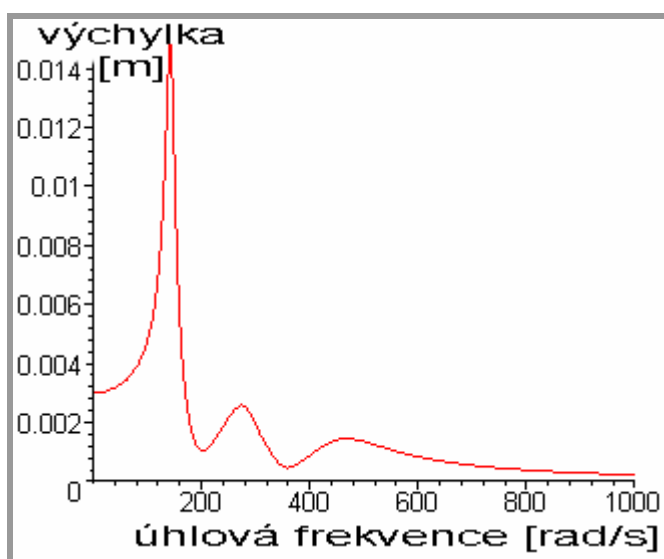
Odezvu soustavy, která je buzena harmonickou silou lze vyjádřit rovnicí [3]:

$$\mathbf{x} = \sum_{v=1}^n \left[C_v e^{-\delta_v t} \sin(\Omega_v t + \varphi_v) \mathbf{v}_v + \mathbf{s}_v \sin(\omega t + \varphi_{pv}) \right] \quad (4.2.18)$$

Integrační konstanty C_v a φ_v je nutné určit z počátečních podmínek.

I v tomto případě se zde počítá s proporcionálním tlumením ze stejného důvodu jako u volného, tlumeného pohybu.

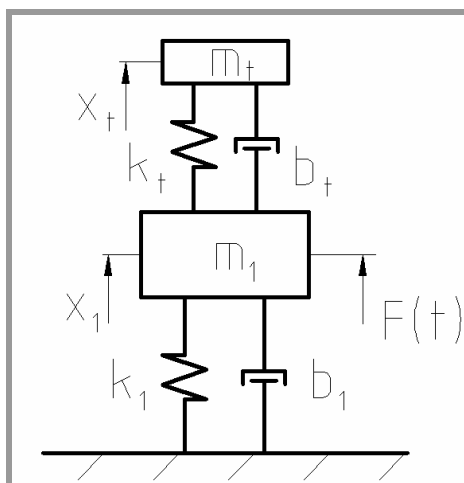
Výsledkem řešení je opět grafické vyjádření amplitud vektoru \mathbf{x} v závislosti na úhlové frekvenci ω .



Obr. 4.2.1 Amplitudofrekvenční charakteristika tělesa buzené tlumené soustavy se třemi stupni volnosti

5 ŘEŠENÝ PŘÍKLAD

Dynamický tlumič vibrací



Obr. 5.1 Schéma dynamického tlumiče vibrací

Charakteristika soustavy:

Jedná se o soustavu s diskrétními parametry, která má dva stupně volnosti ($n=2$). Tato soustava je buzená jednou silou $F(t)$, která má harmonický charakter a působí na základní těleso o hmotnosti m_1 . Základní těleso je schematicky připevněno k nehybnému rámu pomocí pružiny o tuhosti k_1 a tlumiče o součiniteli tlumení b_1 . K základnímu tělesu je připevněn dynamický tlumič (tlumící těleso) o hmotnosti m_t prostřednictvím pružiny o tuhosti k_t a tlumiče o součiniteli tlumení b_t .

5.1 Sestavení pohybových rovnic pro zadanou soustavu

Pohybové rovnice sestavíme pomocí metody Lagrangeových rovnic 2. druhu, kde si nejdříve vyjádříme rovnice jednotlivých energií:

Kinetická energie:

$$E_K = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^n m_j \cdot \dot{x}_j^2 \qquad E_K = \frac{1}{2} \cdot (m_1 \dot{x}_1^2 + m_t \dot{x}_t^2) \qquad (5.1.1)$$

Potenciální energie:

$$E_P = \frac{1}{2} \cdot [k_1 \cdot x_1^2 + k_2 \cdot (x_2 - x_1)^2 + \dots + k_j \cdot (x_j - x_{j-1})^2 + \dots + k_{n+1} \cdot x_n^2] \\ E_P = \frac{1}{2} \cdot [k_1 \cdot x_1^2 + k_t \cdot (x_t - x_1)^2] \qquad (5.1.2)$$

Disipativní energie:

$$E_D = \frac{1}{2} \cdot \left[b_1 \cdot \dot{x}_1^2 + b_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \dots + b_j \cdot (\dot{x}_j - \dot{x}_{j-1})^2 + \dots + b_{n+1} \cdot \dot{x}_n^2 \right]$$

$$E_D = \frac{1}{2} \cdot \left[b_1 \cdot \dot{x}_1^2 + b_t \cdot (\dot{x}_t - \dot{x}_1)^2 \right] \quad (5.1.3)$$

Budící sílu uvažujeme ve tvaru:

$$F(t) = F_0 \cdot e^{i\omega t} \quad (5.1.4)$$

Následně provedeme derivace jednotlivých energií podle dané proměnné, vyjádříme buzení a poté dosadíme do Lagrangeovy rovnice, která má tvar:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial x_j} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial E_P}{\partial x_j} = Q_j(t) \quad (5.1.5)$$

Derivace jednotlivých energií:

a) podle proměnné x_1, \dot{x}_1

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial (m_1 \cdot \dot{x}_1^2 + m_t \cdot \dot{x}_t^2)}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m_1 \cdot \dot{x}_1 \right) = m_1 \cdot \ddot{x}_1 \quad (5.1.6a)$$

$$\frac{\partial E_K}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial (m_1 \cdot \dot{x}_1^2 + m_t \cdot \dot{x}_t^2)}{\partial x_1} = 0 \quad (5.1.6b)$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial (b_1 \cdot \dot{x}_1^2 + b_t \cdot (\dot{x}_t - \dot{x}_1)^2)}{\partial \dot{x}_1} = (b_1 + b_t) \cdot \dot{x}_1 - b_t \cdot \dot{x}_t \quad (5.1.6c)$$

$$\frac{\partial E_P}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial (k_1 \cdot x_1^2 + k_t \cdot (x_t - x_1)^2)}{\partial x_1} = (k_1 + k_t) \cdot x_1 - k_t \cdot x_t \quad (5.1.6d)$$

$$Q_1(t) = F(t) = F_0 \cdot e^{i\omega t} \Rightarrow Q_1 = F_0 \quad (5.1.6e)$$

b) podle proměnné x_t, \dot{x}_t

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}_t} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial (m_1 \cdot \dot{x}_1^2 + m_t \cdot \dot{x}_t^2)}{\partial \dot{x}_t} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m_t \cdot \dot{x}_t \right) = m_t \cdot \ddot{x}_t \quad (5.1.7a)$$

$$\frac{\partial E_K}{\partial x_t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial (m_1 \cdot \dot{x}_1^2 + m_t \cdot \dot{x}_t^2)}{\partial x_t} = 0 \quad (5.1.7b)$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}_t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial (b_1 \cdot \dot{x}_1^2 + b_t \cdot (\dot{x}_t - \dot{x}_1)^2)}{\partial \dot{x}_t} = b_t \cdot \dot{x}_t - b_t \cdot \dot{x}_1 \quad (5.1.7c)$$

$$\frac{\partial E_P}{\partial x_t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial (k_1 \cdot x_1^2 + k_t \cdot (x_t - x_1)^2)}{\partial x_t} = k_t \cdot x_t - k_t \cdot x_1 \quad (5.1.7d)$$

$$Q_t(t) = 0 \Rightarrow Q_t = 0 \quad (5.1.7e)$$

Dosazením do Lagrangeovy rovnice obdržíme soustavu dvou lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (b_1 + b_t) \cdot \dot{x}_1 - b_t \cdot \dot{x}_t + (k_1 + k_t) \cdot x_1 - k_t \cdot x_t &= F_0 \\ m_t \cdot \ddot{x}_t - b_t \cdot \dot{x}_1 + b_t \cdot \dot{x}_t - k_t \cdot x_1 + k_t \cdot x_t &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

Tuto soustavu zapíšeme v maticovém tvaru a získáme pohybovou rovnici:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{Q}(t), \quad (5.1.9)$$

kde jednotlivé matice a vektory mají tvar:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 + b_t & -b_t \\ -b_t & b_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 + k_t & -k_t \\ -k_t & k_t \end{pmatrix}, \quad (5.1.10a,b,c)$$

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_t \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_t \end{pmatrix}. \quad (5.1.10d,e,f,g)$$

Dále budeme řešit tuto soustavu tak, že dosadíme za jednotlivé proměnné tyto číselné hodnoty:

$$\begin{aligned} m_1 &= 2kg & m_t &= 1kg & F_0 &= 400N \\ k_1 &= 280000Nm^{-1} & k_t &= 80000Nm^{-1} \\ b_1 &= 360Nsm^{-1} & b_t &= 20Nsm^{-1} \end{aligned}$$

Příklad je řešen v matematickém programu Maple, jehož obsah je uveden v jednotlivých přílohách.

5.2 Vyjádření vlastních tvarů kmitání volného netlumeného pohybu soustavy

Z řešení pohybových rovnic pomocí frekvenčního determinantu, který je podrobně uveden v příloze 1, dostaneme výsledné vlastní úhlové frekvence a jimi definované normované vlastní tvary dané soustavy.

Vlastní úhlové frekvence soustavy:

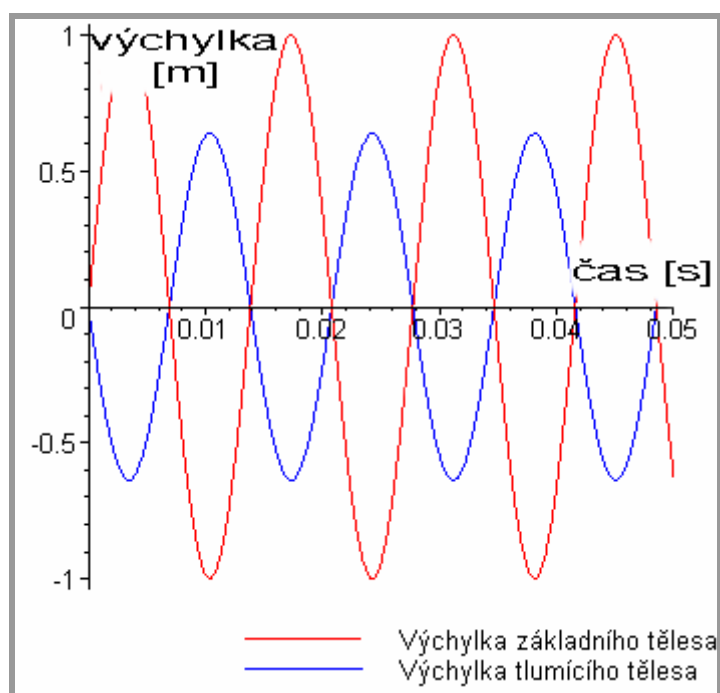
$$\text{- spektrální matice: } \mathbf{\Omega}_0^2 = \begin{pmatrix} 205500 & 0 \\ 0 & 54502 \end{pmatrix}$$

Vlastní tvary kmitání soustavy:

$$\text{- modální matice: } \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & -0.638 \\ 0.318 & 1 \end{pmatrix}$$

Vlastní tvary jsou zobrazeny na obr. 5.2.1 a 5.2.2, ze kterých je vidět, že se obě tělesa pohybují buď ve fázi nebo v protifázi.

Vlastní tvary pro vlastní frekvenci základního tělesa:



Obr. 5.2.1 Vlastní tvar kmitání pro vlastní frekvenci Ω_{01}

vlastní úhlová frekvence: $\Omega_{01} = \sqrt{\Omega_{01}^2} = \sqrt{205500} = 453,32 \text{ rad/s}$ (5.2.1)

vlastní frekvence: $f_{01} = \frac{\Omega_{01}}{2\pi} = \frac{453,32}{2\pi} = 72,15 \text{ Hz}$ (5.2.2)

doba periody: $T_1 = \frac{1}{f_{01}} = \frac{1}{72,15} = 0,0139 \text{ s}$ (5.2.3)

Vlastní tvary pro vlastní frekvenci tlumícího tělesa:



Obr. 5.2.2 Vlastní tvar kmitání pro vlastní frekvenci Ω_{02}

vlastní úhlová frekvence: $\Omega_{02} = \sqrt{\Omega_{02}^2} = \sqrt{54502} = 233,46 \text{ rad/s}$ (5.2.4)

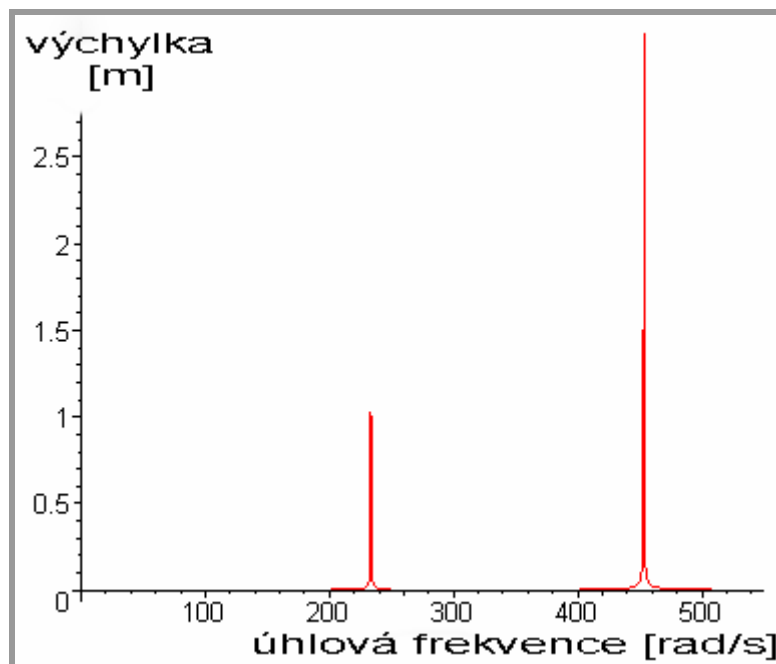
vlastní frekvence: $f_{02} = \frac{\Omega_{02}}{2\pi} = \frac{233,46}{2\pi} = 37,16 \text{ Hz}$ (5.2.5)

doba periody: $T_2 = \frac{1}{f_{02}} = \frac{1}{37,16} = 0,0269 \text{ s}$ (5.2.6)

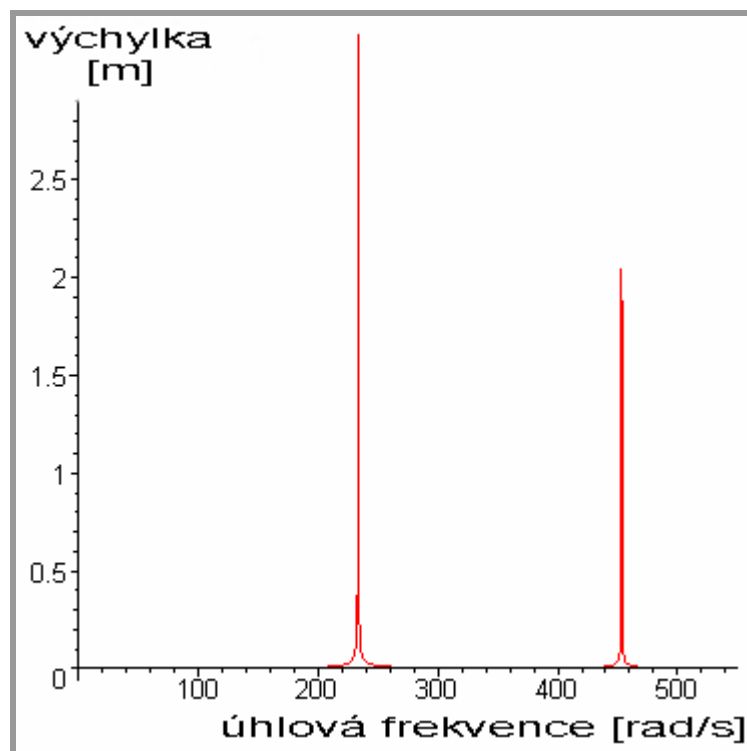
5.3 Sestrojení amplitudofrekvenční charakteristiky netlumené soustavy s harmonickým buzením

Výsledkem řešení, které je podrobně uvedeno v příloze 2, je amplitudofrekvenční charakteristika zobrazující výchylku základního tělesa nebo výchylku tlumícího tělesa v závislosti na úhlové frekvenci, kterou je soustava buzena a odpovídající fázové posunutí mezi budící silou a odezvou těchto těles (viz Příloha 2_ fázové diagramy).

Výsledné amplitudofrekvenční charakteristiky:

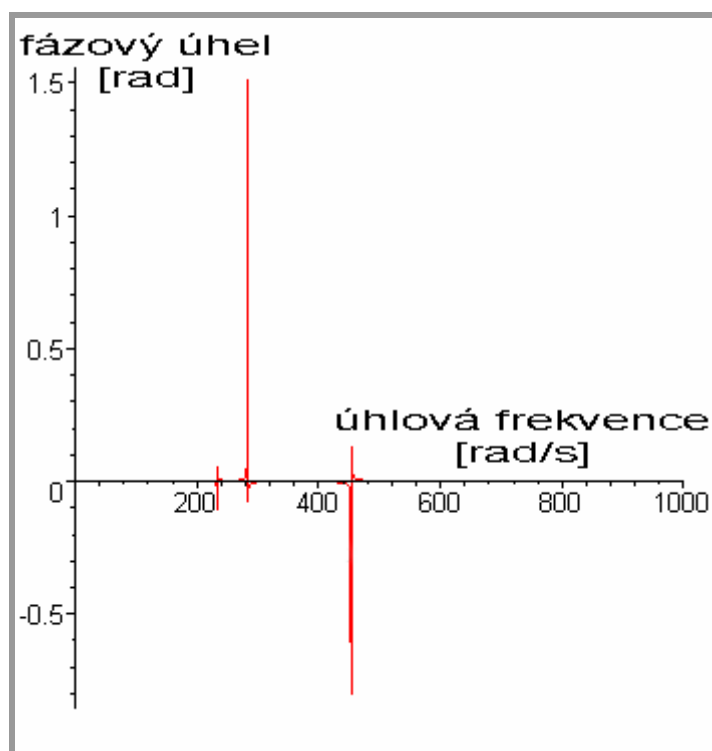


Obr. 5.3.1 Amplitudofrekvenční charakteristika základního tělesa buzené netlumené soustavy

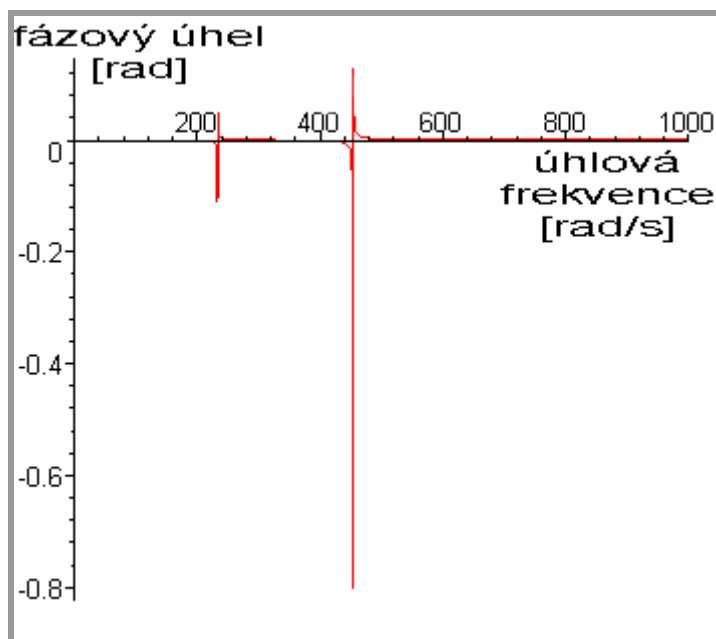


Obr. 5.3.2 Amplitudofrekvenční charakteristika tlumícího tělesa
buzené netlumené soustavy

Fázové diagramy:



Obr. 5.3.3 Fázový diagram posunutí mezi budící silou a odezvou
základního tělesa buzené netlumené soustavy



Obr. 5.3.4 Fázový diagram posunutí mezi budící silou a odezvou tlumícího tělesa buzené netlumené soustavy

Z amplitudofrekvenčních charakteristik je patrné, že jednotlivá tělesa dosahují nejvyšší výchylky právě tehdy, je-li frekvence buzení rovna jejich vlastní frekvenci. Tato skutečnost je také matematicky dokázána na konci přílohy 2.

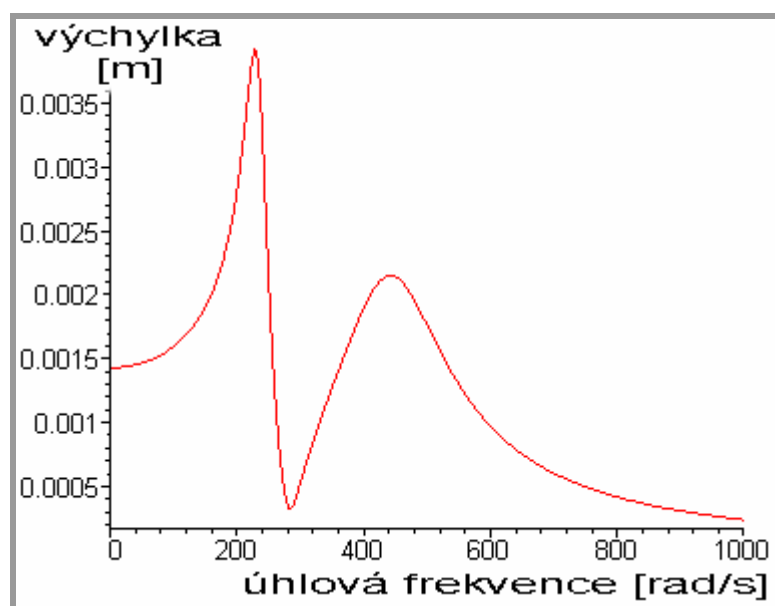
Při detailní analýze získávání fázového diagramu dle kapitoly 3 bychom zjistili, že fázový diagram nelze sestavit. To proto, že hodnota fázového úhlu dle uvedeného postupu je nulová. Ve skutečnosti se však skokově mění v oblasti rezonančních frekvencí o 180 stupňů. Abychom tedy fázový diagram získali, musíme pro výpočet uvažovat alespoň minimální tlumení, které je různé od nuly, ale je tak malé, že ho za nulové považovat můžeme. Dostaneme přibližné řešení buzené tlumené soustavy, jehož výsledky se blíží buzené netlumené soustavě.

V tomto případě byl zvolen součinitel tlumení $b_1 = b_2 = 0,1 \text{ Nsm}^{-1}$. Rozsah na obrázcích obr. 5.3.3 a 5.3.4, který je v rozmezí hodnot $-0,8 \text{ rad}$ až $0,2 \text{ rad}$, respektive $-0,8 \text{ rad}$ až $1,5 \text{ rad}$, je dán rozlišovací schopností grafů v programu Maple. Pouze při vykreslení v blízkosti rezonance, je rozsah v rozmezí hodnot od $-1,57 \text{ rad}$ do $1,57 \text{ rad}$, což odpovídá úhlům -90° až 90° . Celkový rozsah změny fázového úhlu je pak 180 stupňů.

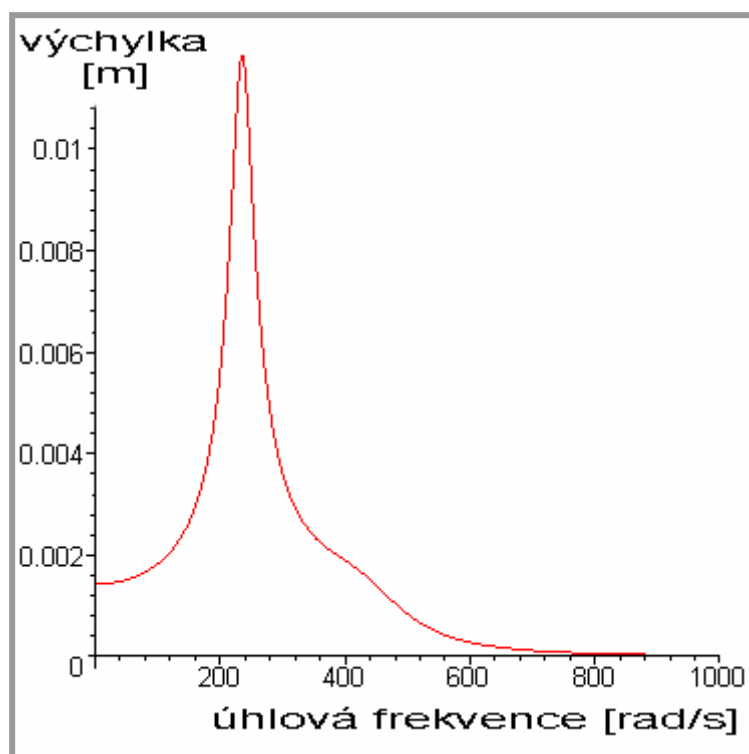
5.4 Sestrojení amplitudofrekvenční charakteristiky tlumené soustavy s harmonickým buzením

Postupným řešením pohybových rovnic, které je podrobně uvedeno v příloze 3, získáme amplitudofrekvenční charakteristiku a odpovídající fázové posunutí mezi budící silou a odezvou.

Výsledné amplitudofrekvenční charakteristiky:



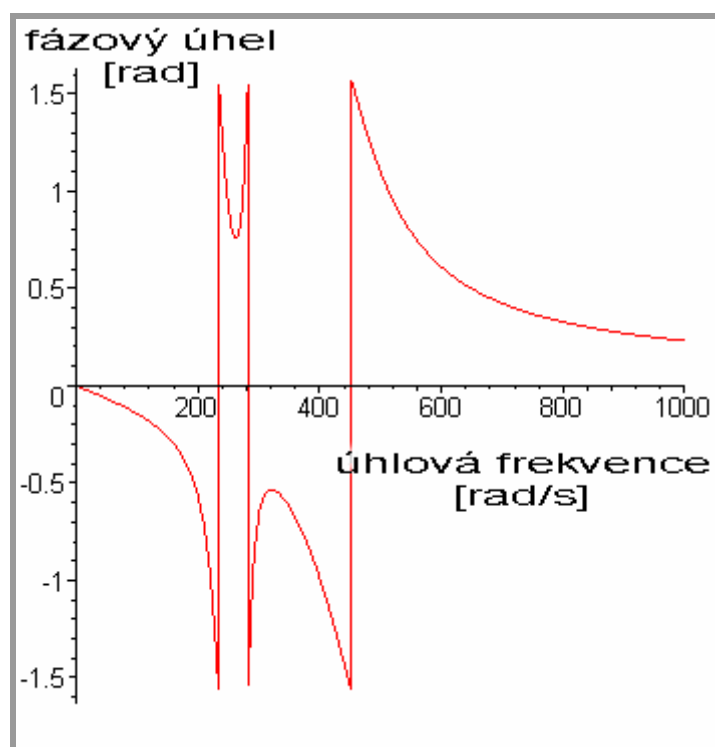
Obr. 5.4.1 Amplitudofrekvenční charakteristika základního tělesa buzené tlumené soustavy



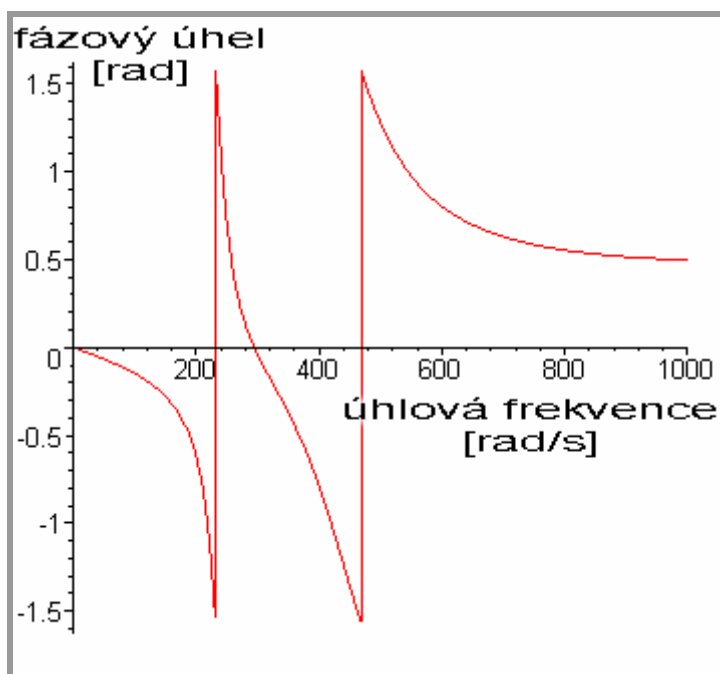
Obr. 5.4.2 Amplitudofrekvenční charakteristika tlumícího tělesa buzené tlumené soustavy

Při podrobném zkoumání amplitudofrekvenční charakteristiky této soustavy bychom zjistili, že největší výchylky těles z rovnovážné polohy nastávají při jiných vlastních frekvencích než v případě netlumené soustavy. Tento jev je způsoben vlivem tlumení.

Fázové diagramy:



Obr. 5.4.3 Fázový diagram posunutí mezi budící silou a odezvou základního tělesa buzené tlumené soustavy



Obr. 5.4.4 Fázový diagram posunutí mezi budící silou a odezvou tlumícího tělesa buzené tlumené soustavy

6 ZÁVĚR

Tato bakalářská práce se zabývá problematikou kmitáním dynamických soustav s n -stupni volnosti a řešením jejich pohybů. Výsledkem jsou vlastní tvary kmitání a amplitudofrekvenční charakteristiky pro vybrané typy soustav. Jsou zde uvedeny postupy pro řešení několika typů soustav, které se mohou v technické praxi vyskytovat. Je třeba však brát v potaz to, že práce vychází z matematických modelů, které se od reálných zařízení mohou významně lišit. Proto výsledky těchto matematických modelů nemusí odpovídat skutečnosti, ale mohou ji částečně nastítnit. Pro dané technické řešení je zapotřebí volit vhodné modely dynamických soustav, kterými se sice tato práce nezabývá, ale jejich obecné řešení je velice podobné.

Úvodní část práce se zabývá teoretickým rozbohem pojmů, obecným sestavením pohybových rovnic pro jakoukoliv soustavu s n -stupni volnosti a následně patřičným zápisem. Je popsán postup sestavení pohybových rovnic pomocí Lagrangeovy metody 2. druhu a pomocí úplného uvolnění soustavy těles.

V následující části je uveden postup řešení jednotlivých typů soustav, který je chronologicky uspořádan od nejjednoduššího modelu netlumené volně kmitající soustavy přes složitější model netlumené buzené soustavy až po model tlumené buzené soustavy.

Poslední část práce je věnována řešení příkladu dynamického tlumiče vibrací. Tento příklad je teoretický model soustavy se dvěma stupni volnosti, který plynule navazuje na teoretické znalosti zmíněné v předchozích částech práce. Příklad je řešen v matematickém programu Maple 12 (Classic Worksheet), kde jsou prvky modelu řešeny jako parametrické, aby bylo možné jednoduše měnit parametry modelu. Konkrétně se jedná o hmotnosti těles, tuhosti pružin, tlumící konstanty tlumičů a velikost budící síly. Výsledkem jsou pak numerická vyjádření vlastních tvarů, amplitudofrekvenční charakteristiky a fázové diagramy, které můžeme využít k dalšímu zpracování a vyhodnocení.

7 SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] BREPTA, Rudolf; PŮST, Ladislav; TUREK, František. *Mechanické kmitání*. Praha: Sobotáles, 1994. 592s. ISBN 80-901684-8-5.
- [2] KRATOCHVÍL, Ctirad; SLAVÍK, Jaromír. *Mechanika těles – Dynamika*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, listopad 2002. 227s. ISBN 80-214-2260-2.
- [3] SLAVÍK, Jaromír. *Počítačové metody mechaniky* [online]. Brno : Ústav mechaniky těles (VUT v Brně, Fakulta strojního inženýrství), 2001 [cit. 2010-03-15]. Dostupné z WWW: <<http://www.umt.fme.vutbr.cz/SKRIPTA/slavik/pocme.zip>>.
- [4] SLAVÍK, Jaromír; STEJSKAL, Vladimír; ZEMAN, Vladimír. *Základy dynamiky strojů*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1997. 314s. ISBN 80-01-01622-6.
- [5] *Katedra geofyziky MFF UK* [online], 12.5.2005 [cit. 2010-3-15]. Dostupné z WWW: <<http://karel.troja.mff.cuni.cz/vyuka/seismologie/seisl/cele/praha.gif>>.

8 SEZNAM POUŽITÝCH VELIČIN

$b [Ns / m]$	tlumící konstanta
$E_D [J]$	disipativní funkce (energie)
$E_K [J]$	kinetická energie
$E_P [J]$	potenciální energie
$f [Hz]$	frekvence kmitání
$k [N / m]$	tuhost
$m [kg]$	hmotnost
$Q [N]$	síla
$s [m]$	amplituda odezvy
$T [s]$	doba periody
$t [s]$	čas
$v [m]$	amplituda kmitu
$x [m]$	výchylka
$\dot{x} [m / s]$	rychlost
$\ddot{x} [m / s^2]$	zrychlení
$\varphi_p [rad]$	fáze mezi budící silou a odezvou
$\Omega [rad / s]$	úhlová frekvence
$\Omega_0 [rad / s]$	vlastní úhlová frekvence
$\varpi [rad / s]$	budící úhlová frekvence

9 SEZNAM OBRÁZKŮ A GRAFŮ

Obr. 1.1.1	Model tlumené soustavy se dvěma stupni volnosti [1]	13
Obr. 1.1.2	Soustava se spojitě rozloženými parametry - nosník proměnného průřezu [4]	14
Obr. 1.2.1	Graf průběhu deterministického buzení	14
Obr. 1.2.2	Graf průběhu stochastického buzení [5]	15
Obr. 1.4.1	Model buzené tlumené soustavy s n stupni volnosti [2]	16
Obr. 2.1	Model netlumené soustavy n hmot m a n tuhostí k [1]	19
Obr. 3.1	Schéma netlumené buzené soustavy se třemi stupni volnosti	22
Obr. 3.2	Amplitudofrekvenční charakteristika tělesa buzené netlumené soustavy se třemi stupni volnosti	23
Obr. 4.1	Schéma buzené tlumené soustavy se třemi stupni volnosti	24
Obr. 4.2.1	Amplitudofrekvenční charakteristika tělesa buzené tlumené soustavy se třemi stupni volnosti	27
Obr. 5.1	Schéma dynamického tlumiče vibrací	28
Obr. 5.2.1	Vlastní tvar kmitání pro vlastní frekvenci Ω_{01}	31
Obr. 5.2.2	Vlastní tvar kmitání pro vlastní frekvenci Ω_{02}	31
Obr. 5.3.1	Amplitudofrekvenční charakteristika základního tělesa buzené netlumené soustavy	32
Obr. 5.3.2	Amplitudofrekvenční charakteristika tlumícího tělesa buzené netlumené soustavy	33
Obr. 5.3.3	Fázový diagram posunutí mezi budící silou a odezvou základního tělesa buzené netlumené soustavy	33
Obr. 5.3.4	Fázový diagram posunutí mezi budící silou a odezvou tlumícího tělesa buzené netlumené soustavy	34
Obr. 5.4.1	Amplitudofrekvenční charakteristika základního tělesa buzené tlumené soustavy	35
Obr. 5.4.2	Amplitudofrekvenční charakteristika tlumícího tělesa buzené tlumené soustavy	35
Obr. 5.4.3	Fázový diagram posunutí mezi budící silou a odezvou základního tělesa buzené tlumené soustavy	36
Obr. 5.4.4	Fázový diagram posunutí mezi budící silou a odezvou tlumícího tělesa buzené tlumené soustavy	36

10 SEZNAM PŘÍLOH

Numerické řešení příkladu v této bakalářské práci bylo provedeno pomocí programu Maple. Nedílnou součástí tohoto programu jsou skripty psané vnitřním programovacím jazykem, které jsou dlouhé a čtenáři neposkytnou požadované informace – z toho důvodu nejsou tištěny. Tyto skripty jsou součástí práce na přiloženém CD.

CD obsahuje adresáře:

- Příloha 1 _ netlumené volné kmitání
- Příloha 2 _ netlumené buzené kmitání
- Příloha 3 _ tlumené buzené kmitání

(Každý adresář obsahuje dva soubory s příponou mws. Soubor s označením analytické řešení obsahuje analytické řešení, ze kterého vychází řešení numerické.)

Dále jsou na CD uloženy všechny grafické výstupy v adresáři „vystup“ a použité obrázky v adresáři „obr“.

Obsahem CD je i text práce ve formátu *pdf*.